Séquence 1 : suites

Chapitre 2 : limites de suites

1 Notion de limite

S'intéresser à la limite d'une suite, c'est s'intéresser aux valeurs que prend la suite lorsque n tend vers $+\infty$. Plusieurs comportements sont possibles :

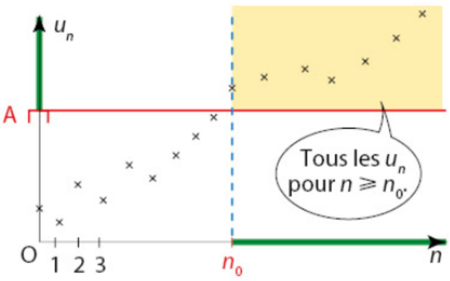
- la suite converge vers une valeur réelle ℓ : on dit que la suite est convergente et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.
- la suite est divergente :
  - ⋆ soit elle diverge vers $\pm\infty$, on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$;
  - ⋆ soit elle n'admet pas de limite.

1.1 Limite infinie de suite

Suite divergeant vers $+\infty$

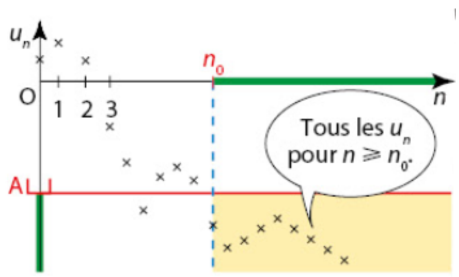
Définition. *Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que :*
tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ (où $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout seuil A donné,
il existe un rang n_0 tel que tous les termes de la suite sont supérieurs à ce seuil à partir du rang n_0.



Exemple. *Suites de référence de limite $+\infty$:*
Pour $k>0$, les suites $(k\,n)$; $(k\,n^2)$; $(k\,n^3)$; $(k\sqrt{n})$ et $(k\,e^n)$ ont pour limite $+\infty$.

Suite divergeant vers $-\infty$



Exemple.

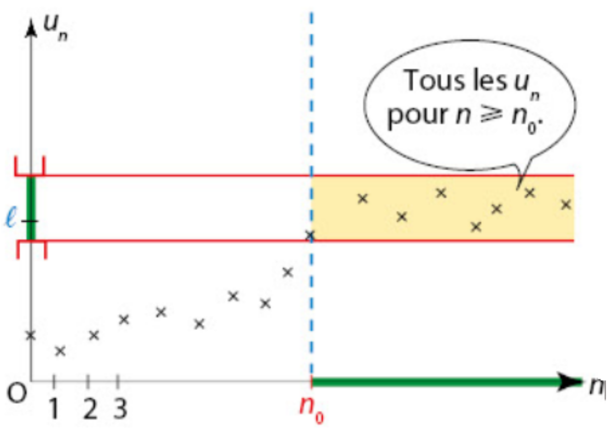
1.2 Suite convergeant vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

Définition. *Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ signifie que :*
tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Autrement dit, aussi petite soit la taille d'un intervalle contenant le réel ℓ, il existe un rang n_0 tel que tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir du rang n_0.

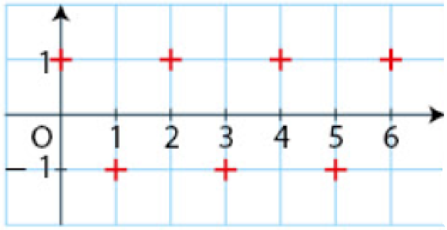
Remarque. *Lorsqu'elle existe, la limite ℓ d'une suite est **unique**.*

Exemple. *Suites de référence de limite 0 :*
Pour $k \neq 0$, les suites $(\frac{k}{n})$; $(\frac{k}{n^2})$; $(\frac{k}{n^3})$; $(\frac{k}{\sqrt{n}})$ et $(\frac{k}{e^n})$ ont pour limite $+\infty$.



1.3 Suites n'admettant aucune limite

Il existe des suites qui n'admettent aucune limite, finie ou infinie.



Exemple.

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$

1.4 Cas des suites arithmétiques et géométriques

Théorème. *Soit $Q \in \mathbb{R}$.*

- *Si $Q > 1$ alors la suite (Q^n) diverge vers $+\infty$.*
- *Si $Q = 1$ alors la suite (Q^n) est constante et converge vers 1.*
- *Si $-1 < Q < 1$ alors la suite (Q^n) converge vers 0.*
- *Si $Q < -1$ alors la suite (Q^n) n'a pas de limite.*

- Une suite arithmétique (U_n) de premier terme U_0 et de raison R a pour terme général : $U_n = U_0 + Rn$. Ainsi :
  - $\star$
  - $\star$
- Une suite géométrique (V_n) de premier terme $V_0 \neq 0$ et de raison Q a pour terme général : $V_n = V_0 \times Q^n$. Ainsi :
  - $\star$
  - $\star$
  - $\star$
  - $\star$

2 Limites et comparaison

2.1 Théorème de comparaison : pour une limite infinie

Proposition. *Si (U_n) et (V_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :*

1. *à partir d'un certain rang, $U_n \geqslant V_n$*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

Démonstration. □

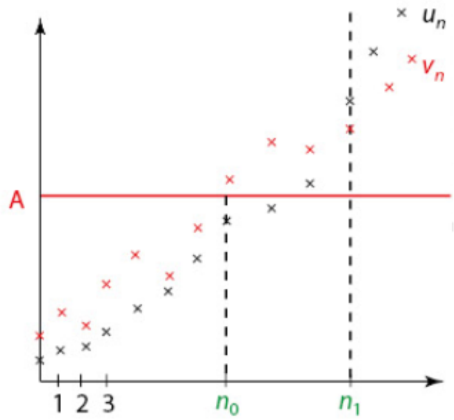


Illustration : cas où $n_1 > n_0$

Proposition. *De même,*
Si (U_n) et (V_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

1. *à partir d'un certain rang, $U_n \leqslant V_n$*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

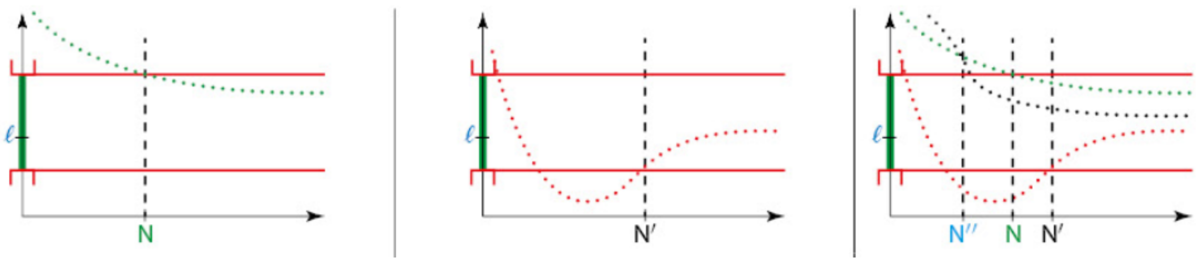
2.2 Théorème des gendarmes : pour une limite finie

Théorème. *Si (U_n), (V_n) et (W_n) sont trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :*

1. *à partir d'un certain rang, $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \ell$ *(où $\ell \in \mathbb{R}$)*

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

Démonstration. □



Exemple. *Soit (W_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $W_n = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$.*

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

3 Opérations et limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$ et ℓ, ℓ' désignent des nombres réels.
Les règles suivantes sont admises :

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dots$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) = \dots$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas de **forme indéterminée** (FI), on ne peut pas conclure sur la valeur de la limite ; il existe des méthodes pour, dans certains cas, lever l'indétermination.

Méthode 1 :
Pour l'étude de la limite d'une suite (u_n) définie par $u_n = P(n)$ où P est une fonction polynôme, on aboutit parfois à une forme indéterminée : il suffit alors de factoriser par le terme de plus haut degré de $P(n)$.

3.1 Quotient de deux suites

Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel, $v_n \neq 0$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n \neq 0$:

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$:

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple. *Pour la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{n^2+1}$:*
on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Méthode 2 :
Pour l'étude de la limite d'un quotient $\dfrac{a_n}{b_n}$, on aboutit parfois à une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".
on peut alors penser à mettre en facteur dans a_n et dans b_n le terme prépondérant qui tend "le plus vite" vers l'infini.

Exemple. *Pour $u_n = \dfrac{2n^2+3n}{10n^2-4}$:*
on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2+3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 10n^2-4 = +\infty$ donc on est dans le cas d'une forme indéterminée.

Or : $u_n = \dfrac{n^2(2+\frac{3}{n})}{n^2(10-\frac{4}{n^2})} = \dfrac{(2+\frac{3}{n})}{(10-\frac{4}{n^2})}$.

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{3}{n} = 2$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} 10-\dfrac{4}{n^2} = 10$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{10} = 0,2$.

3.2 Théorème de la limite monotone

Définition. *Soit (u_n) une suite.*

- *On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.*
- *On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.*
- *On dit que (u_n) est **bornée** si (u_n) est **majorée** et **minorée**.*

Théorème.
1. *Toute suite croissante majorée converge.*
2. *Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*
3. *Toute suite décroissante minorée converge.*
4. *Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*